TMA4115 — Matte 3

Håvard Krogstie - krogstie.havard@gmail.com
Eivind Xu Djurhuus

23. august 2020

Dette dokumentet er et forsøk på å samle det meste av definisjoner og resultater som er kjekke å ha skrevet ned i Matte 3. Metoder på pensum blir gjennomgått, med bevis der det later til å være pensum, altså forelesningsnotatene. Jeg har prøvd å være mer rigorøs enn kildematerialet når det gjelder komplekse tall. Det mest spennende i denne teksten står kanskje i resultatdelene, siden det er der teoremer ofte dukker opp.

Dokumentet har jevnt over ikke kildehenvisninger, og er ikke vurdert av noen med kunnskap i faget. Du finner heller ikke øvingskok her. Les på eget ansvar. Kildekode og nyeste utgave på github.com/haved/notater. Skrivefeil, faktafeil, mangler eller uklaheter? Opprett en issue eller skriv en e-post!

Innhold

1 Lineær uavhengighet

En mengde vektorer $v_1, v_2, \dots, v_n$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

Dette forutsetter at + mellom vektorer og $\cdot$ med skalarer er definert. Vi kaller venstresiden av ligningen for en lineærkombinasjon.

1.1 Resultater

For enhver lineærkombinasjon u av lineært uavhengige vektorer $v_1, v_2, \dots, v_n$ finnes det kun ett sett med koefisienter $c_1, c_2, \dots, c_n$ som gir u.

2 Vektorrom

Et vektorrom består av en mengde vektorer V, en kropp med skalarer, en addisjonsopperasjon + mellom vektorer, og en multiplikasjonsopperasjon $\cdot$ mellom vektor og skalar. + og $\cdot$ må være definert for alle $v \in V$, og skal være lukket over V. Operajsonene følger følgende regler:

- + er assosiativ
- + er kommutativ
- + har identitetselement: $\vec{0}$
- + har invers
- $(ab) \cdot u = a \cdot (b \cdot u)$
- $\cdot$ har identitetselement: 1
- $\cdot$ distribuerer over skalar-+
- $\cdot$ distribuerer over vektor-+

2.1 Resultater

Vi kan se at $0 \cdot u = 0$ og $(-1)u = -u$. Det finnes kun én 1, én 0 og én 0-vektor.

2.2 Spenn

Gitt en mengde vektorer $v_1, v_2, \dots, v_n$ definerer vi spennet som mengden av alle lineærkombinasjoner av vektorene. Vi bruker notasjonen

$$\mathrm{Sp}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n \mid c_i \text{ er skalar} \mid i \in [1, n]\}$$

Mengden er lukket under vektoradisjon og skalarmultiplikasjon, så det er et vektorrom (så lenge $+$ og $\cdot$ er definert forsvarlig). Vi sier at vektorene v_1, v_2 etc. spenner ut vektorrommet V.

Merk at vektorene ikke nødvendigvis er lineært uavhengige, og at flere mengder vektorer kan spenne ut det samme rommet.

2.2.1 Resultater

La $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, da vil $\text{Sp}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ være et underrom av V.

2.3 Eksempler

$\mathbb{R}^3$, $\mathbb{C}^2$, P_2

3 Basis

En Basis $\mathbb{B}$ er en liste med **lineært uavhengige** vektorer som spenner ut et vektorrom V. Alle basiser for rommet V har samme antall vektorer, så vi definerer dimensjonen på vektorrommet $\dim V = |\mathbb{B}|$. Basiser lar oss bruke koordinatsystemer for alle vektorrom.

3.1 Basiser og koordinatsystem

For enhver basis $\mathbb{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n)$ til et n-dimensjonalt vektorrom V og en vektor $\mathbf{v} \in V$ vet vi at $\mathbf{v}$ kan skrives som lineærkombinasjonen

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Vi definerer *koordinatvektoren* til $\mathbf{v}$ i $\mathbb{B}$ som

$$[\mathbf{v}]_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

I tillegg kaller vi avbildningen

$$\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathbb{B}}$$

for *koordinatsavbildningen* av $\mathbf{v}$ med hensyn på $\mathbb{B}$. Koordinatavbildingen er en funksjon $V \to \mathbb{R}^n$. Avbildningen er en bijektiv lineærtransformasjon.

Den motsatte funksjonen er lineærkombinasjonen av basisvektorene med koordinatvektoren som koeffisienter.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}[\mathbf{v}]_{\mathbb{B}} = \mathbf{v}$$

For å finne koordinatvektoren løser man ligningen over for $[\mathbf{v}]_{\mathbb{B}}$.

3.2 Eksempler

Det finnes uendelig mange basiser for alle vektorrom. En basis for vektorrommet av andregradspolynomer: $(1, x, x^2)$.

3.2.1 Standardbasis

For rommet $\mathbb{R}^n$ definerer vi standardbasisen til å være de n vektorene

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

Du kjenner dem kanskje igjen fra identitetsmatrisen. Standardbasisen gir oss et koordinatsystem for $\mathbb{R}^n$ som er helt likt $\mathbb{R}^n$ selv. Fysikkbøker skriver ofte vektorer i $\mathbb{R}^3$ som

$$5\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

Da brukes **i**, **j**og **k**som enhetsvektorene i $\mathbb{R}^3$, altså standardbasisen.

$$5\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\8\\-3\end{bmatrix}$$

3.3 Resultater

- Det er ikke mulig å ha 5 lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^4$.
- Det er alltid mulig å lage en basis (Ta et spenn og fjærn lineært avhengige vektorer til det ikke er noen).
- $[\mathbf{v}]_{\mathbb{B}} \in \mathbb{R}^{|\mathbb{B}|}$
- koordinatavbilding er en bijektiv lineærtransformasjon $T : V \to \mathbb{R}^{\dim V}$.

3.4 Skifte av basis

Si at vi for et vektorrom V har to basiser $\mathbb{B}$ og $\mathbb{B}'$. Av ulike grunner kan det være lettere å arbeide med et av de to koordinatsystemene gitt av basisene. Det vil derfor være ønskelig å finne ut hvordan koordinatvektorene $[\mathbf{v}]_{\mathbb{B}}$ og $[\mathbf{v}]_{\mathbb{B}'}$ for en vilkårlig vektor $\mathbf{v} \in V$ er relatert. Med andre ord, hvis du har en vektor $\mathbf{v}$ utrykt med hensyn på en gammel basis $\mathbb{B}$, hvordan vil man utrykke den samme vektoren med hensyn på en ny basis $\mathbb{B}'$? For å løse dette problemet finner vi først hvordan vi kan utrykke hver gamle basisvektor som en lineærkombinasjon av den nye basisen. Dette tilsvarer å finne, for hver vektor $\mathbf{u}_i$ i $\mathbb{B}$, koordinatvektoren $[\mathbf{u}_i]_{\mathbb{B}'}$ relativt til $\mathbb{B}'$. Vi kan så danne *transisjonsmatrisen* (også kalt for skifte-av-basis-matrisen) $P_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'}$ fra $\mathbb{B}$ til $\mathbb{B}'$ slik:

$$P_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'} = \begin{bmatrix}[\mathbf{u}_1]_{\mathbb{B}'} & [\mathbf{u}_2]_{\mathbb{B}'} & \cdots & [\mathbf{u}_n]_{\mathbb{B}'}\end{bmatrix}$$

Altså vi lager en matrise hvor hver kolonne er koordinatvektoren til en gammel basisvektor utrykt med hensyn på den nye basisen. Denne matrisen vil ha egenskapen

$$P_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'}[\mathbf{v}]_{\mathbb{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathbb{B}'}$$

Et viktig teorem for transisjonsmatriser, som vi ikke skal bevise, er at transisjonsmatrisen fra $\mathbb{B}'$ til $\mathbb{B}$ vil være inversen til transisjonsmatrisen fra $\mathbb{B}$ til $\mathbb{B}'$ (og dermed at alle transisjonsmatriser er inverterbare).

$$P_{\mathbb{B}'\to\mathbb{B}} = P^{-1}_{\mathbb{B}\to\mathbb{B}'}$$

I likhet med at vi kan utrykke vektorer med hensyn på flere basiser, kan vi også utrykke lineære transformasjoner med hensyn på forskjellige basiser. Si at den lineære transformasjonen T kan representeres som matrisen $[T]_{\mathbb{B}}$ med hensyn på basisen $\mathbb{B}$. Vi ønsker så utrykke T som matrisen $[T]_{\mathbb{B}'}$ med hensyn på $\mathbb{B}'$. Intuitivt vil metoden for dette være å skifte basis fra $\mathbb{B}'$ til $\mathbb{B}$, utføre den lineære transformasjonen som vi kan utrykke som matrisen $[T]_{\mathbb{B}}$, og så skifte basis tilbake fra $\mathbb{B}$ til $\mathbb{B}'$. Fra dette får vi formelen

$$[T]_{\mathbb{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathbb{B}}P$$

hvor $P = P_{\mathbb{B}'\to\mathbb{B}}$.

4 Underrom

Et underrom $U \subseteq V$ er et vektorrom med vektorer fra V. Vektoroperasjonene er de samme, og U må være lukket over dem.

4.1 Teste om underrom

Sjekk at U er lukket, altså at $u \in U \implies a \cdot u \in U$ og $u, v \in U \implies (u+v) \in U$. Underrommet må ha 0-vektoren, +-inverser etc.

4.2 Resultater

$v_1, v_2, \ldots, v_n \in V \implies \mathrm{Sp}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$
Hvis $U \subseteq V$ og $\dim U = \dim V$, er $U = V$
Gitt en lin.trans $T : V \to W$ vil $imT \subseteq W$ og $\ker T \subseteq V$

5 Lineære transformasjoner

En lineær transformasjon $T : V \to W$ (der V og W er vektorrom) er en funksjon med to krav:

$$a \cdot T(v) = T(a \cdot v) \qquad\qquad T(v) + T(u) = T(v + u)$$

Vi kaller V for domenet til T, og W kalles kodomenet. De vektorene i W det er mulig for lineærtransformasjonen å treffe kalles bildet til T, og benevnes $\operatorname{im} T \subseteq W$. Vektorene i V som blir til nullvektoren kalles kjernen, og benevnes $\ker T \subseteq V$.

$$\operatorname{im} T = \{T(\mathbf{v}) \in W \mid \mathbf{v} \in V\}$$
$$\ker T = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = 0\}$$

5.1 Injektiv og surjektiv

En lineærtransformasjon $T : V \to W$ er injektiv hvis

$$T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{u}$$

Dette er det samme som å si at enhver vektor $\mathbf{v} \in V$ gir en ulik vektor $T(\mathbf{v})$.

$$T \text{ er injektiv} \iff \dim \operatorname{im} T = \dim V \iff \ker T = \{0\}$$

Kun injektive funksjoner er entydig inverterbare.

En lineærtransformasjon $T : V \to W$ er surjektiv hvis

$$\forall \mathbf{u} \in W \ \exists \mathbf{v} \in V \ (T(\mathbf{v}) = \mathbf{u})$$

Dette er det samme som å si at alle vektorer i kodomenet (W) er mulige å "treffe" med T.

$$T \text{ er surjektiv} \iff \operatorname{im} T = W$$

En funksjon som både er injektiv og surjektiv kalles bijektiv, eller 1-til-1-korrespondanse mellom domene og kodomene.

5.2 Definisjon ut ifra basis

Man kan definere en lineærtransformasjon $T : V \to W$ ut ifra hva som skjer med vektorene i en basis for V. Gitt basisen $\mathbb{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ og avbildingene $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ kan vi transformere enhver vektor $u \in V$. Finn først koeffisientene $c_1, c_2, \ldots, c_n$ til u i $\mathbb{B}$.

$$T(c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \cdots + c_nT(v_n)$$

$$T(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} T(v_1) & T(v_2) & \cdots & T(v_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Dersom basisen er standardbasisen for $\mathbb{R}^n$, altså at $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$ etc. får vi at

$$T(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}) & T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}) & \cdots & T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Vi har her gjort T om til en matrise. Alle lineærtransformasjoner kan gjøres om til matriser, men vi må passe på hvilken basis matrisen transformerer fra og til.

5.3 Resultater

For alle lineærtransformasjoner $T : V \to W$

- $T(c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \ldots + c_nT(v_n)$
- $T(\vec{0}) = \vec{0}$

- $\operatorname{im} T$ og $\ker T$ er vektorrom (0 er altså alltid med).
- $\dim \operatorname{im} T + \dim \ker T = \dim V$ (Se Rank-Nullity – Seksjon 6.7.1).
- $\dim V < \dim W \Rightarrow T$ kan ikke være surjektiv. (Se også lenger oppe)
- $\dim V > \dim W \Rightarrow T$ kan ikke være injektiv. (Se også lenger oppe)

5.4 Eksempel

Derivasjon er en lineærtransformasjon fra vektorrommet av uendelig deriverbare funksjoner til seg selv

En $m \times n$-matrise A kan ses som en lineærtransformasjon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$T(v) = Av$$

6 Matriser

Matriser er tabeller med høyde og bredde og tall. En $m \times n$-matrise har høyde m og bredde n. Hvis to matriser har samme dimensjoner kan de adderes ved å addere plassene enkeltvis. Man kan også gange en matrise med en skalar ved å gange inn tallet i alle ruter.

$$4 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 16 & 28 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 17 \\ 19 & 36 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan også gange en $m \times n$-matrise med en $n \times o$-matrise, og resultatet blir en $m \times o$-matrise. Vi gjør dot-produkt mellom rad og kolonne for å resultatet i hver rute.

Vi kan se på vektorer som matriser der én av langdene er 1. Vi bruker ofte kolonnevektorer, altså $n \times 1$-matriser. Disse kan ganges (bakfra) med en $m \times n$-matrise, og resulatet blir en $m \times 1$-vektor. Eksempel:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \\ -2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 19 \\ 7 \end{bmatrix}$$

6.1 Regneregler

La A, B og C være matriser. La I være identitetsmatrisen, og O være nullmatrisen. La a og b være skalarer. La størrelsene på matrisene være slik at operasjonene er definerte. Da holder følgende formler.

$$
\begin{aligned}
A + B &= B + A && + \text{ er kommutativ} \\
A + (B + C) &= (A + B) + C && + \text{ er assosiativ} \\
A + O &= O + A = A && O \text{ er } + \text{ sitt identitetselement} \\
A + -A &= 0 && + \text{ har inverser} \\
A(BC) &= (AB)C && * \text{ er assosiativ} \\
AI &= IA = A && I \text{ er } * \text{ sitt identitetselement} \\
A(B + C) &= AB + AC && * \text{ distribuerer over } + \\
(B + C)A &= BA + CA && \\
a(B + C) &= aB + aC && \\
(a + b)C &= aC + aC && \\
a(bC) &= (ab)C && \\
a(BC) &= (aB)C = B(aC) &&
\end{aligned}
$$

6.2 Ligningssett: $Ac = v$

For å løse ligningssett kan vi putte ligningene inn i en matrise A, og variablene inn i en kolonnevektor c. Det ønskede resultatet fra hver ligning puttes in en kolonnevektor v. Ligningen blir da $Ac = v$. Eksempel:

$$
\begin{array}{llll}
4x & -3y & +2z & = 8 \\
2x & -4y & -3z & = -5 \\
3x & +y & -z & = 10
\end{array}
\implies
\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}
$$

Dette kan løses ved hjelp av radoperasjoner og Gauss-eliminasjon

6.3 Radoperasjoner, Gauss-eliminasjon og pivot

Vi kan skrive opp ligningssettet fra forrige oppgave på følgende måte:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right]
$$

Vi har nå tre radoperasjoner vi kan gjøre:

- Gange en rad med et tall $c \neq 0$
- Legge til en multippel av én rad til en annen rad

- Bytte plass på to rader

Disse operasjonene endrer ikke på løsningene på ligningssettet. Man kan også gjøre radoperasjoner på matriser uten "løsning" (altså tall bak streken), men disse operasjonere vil endre determinant og kolonnerom.

6.3.1 Trappeform

Gauss-eliminasjon betyr å gjøre radoperasjoner til du oppnår trappeform. Definisjonen på trappeform er at alle rader starter med n 0ere etterfulgt av en 1, og at alle rader har n strengt større enn raden før. Dette holder på helt til du har rader med bare 0, som du kan ha så mange du vil av, så lenge de er på bunnen. Hver rad som ikke er bare 0 har som sagt en 1er som første ikke-0, og den kalles **pivot-element**. Antall pivot-elementer = rank til matrisen.

Eksempler

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Moteksempler

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

6.3.2 Redusert trappeform

Ofte er det greit å gjøre radoperasjoner vidre til redusert trappeform. Det betyr i tillegg til trappeform at hver kolonne med pivot-element ellers bare har 0.

Eksempler

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.3.3 Løse ligningssettet

Først reduser matrisen til redusert trappeform. Hvis du har noen 0-rader med ikke-0 løsning, er ligningssettet inkonsistent, og har ingen løsning. (Det finnes måter å finne "nærmeste" løsning, se seksjon 12).

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \text{Ingen løsninger}$$

Hvis ligningssettet har et pivot-element i hver kolonne, er det nøyaktig én løsning

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbb{L} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Hvis ikke alle kolonner har pivot-element, er det uendelig mange løsninger, og vi parametriserer. Alle kolonner uten pivot-element blir frie variabler (parameter).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Introduserer parameter } s \\ x - 4s = 4 \\ y + s = 2 \\ z = s \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Løser ut} \\ x = 4 + 4s \\ y = 2 - s \\ z = s \end{array} \Rightarrow \mathbb{L} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.4 Triangulære matriser

Vi definerer øvre triangulære og nedre triangulære matriser som kvadratiske matriser der henholdsvis alt under eller alt over diagonalen er 0. Merk at trappeform i kvadratisk matrise impliserer øvre triangulær. Denne implikasjonen går ikke begge veier, siden trappeform krever at pivotelementer er 1.

6.5 Null-, rad- og kolonnerom

Nullrommet til en matrise er alle vektorer som ganget med matrisen blir 0-vektoren. Dette er da kjernen (ker) til lineærtransformasjon gitt av $A_{m\times n}$.

$$\text{Null}\, A_{m\times n} = \{v \in \mathbb{R}^n | A_{m\times n} v = 0\}$$

Kolonnerommet er spennet av vektorene som utgjør kolonnene i matrisen. Dette vil også være bildet (im) av lineærtransformasjonen.

$$\operatorname{Col} A_{m\times n} = \operatorname{Sp}\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$$

Radrommet er spennet av vektorene som utgjør radene i matrisen.

$$\operatorname{Row} A_{m\times n} = \operatorname{Sp}\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$$

Et viktig resultat er at radrommet er ortogonalt komplement til nullrommet. Se seksjon 7.4.

6.5.1 Basis for Col or Row

Gjør gauss-eliminasjon på A til du får trappeform.
Radene som ikke er 0 utgjør er en basis for Row A.
For en basis for $\operatorname{Col} A$ plukker du ut de kolonnene som inneholder pivot-elementer, men fra A, altså fra matrisen før du gjør radopperasjoner.

6.6 Determinant

TODO: Hvordan regne determinant, hva det betyr. Kun for kvadratiske mariser.

$$\det(A) = 0 \iff A \text{ er ikke-inverterbar}$$

Se seksjon 6.9.1 for betydningen av dette.

Siden determinanten sier hvordan volumet endrer seg etter en lineærtransformasjon, og matrisemultiplikasjon gir en matrise som gjør begge lineærtransformasjonene, gir følgende regel mening

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Dette forteller oss f.eks. at et produkt med en ikke-inverterbar matrise alltid vil være ikke-inverterbart.

6.7 Rank

Rank til en $m \times n$-matrise A kan defineres på flere, identiske måter.

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Row} A$$

Rank er altså antallet lineært uavhenige kolonnevektorer, og sier oss hvor mange dimensjoner vi får som "output" fra matrisen. Vi kan f.eks. finne rank ved å gjøre gauss-eliminasjon og telle antall pivot-elementer. Det er også verdt å merke seg at siden $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^\top$, så er det mulig å regne ut rank den veien man selv vil.

6.7.1 Rank-Nullity

Et viktig teorem sier at for enhver matrise $A_{m\times n}$ vil følgende holde:

$$\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Null} A = n$$

Rank sier hvor mange dimensjoner vi har "beholdt" i bildet, og dimensjonen til nullrommet sier hvor mange dimensjoner vi har "mistet" til 0. Disse to i sum skal være lik dimensjonen til input, n.

6.8 Transponert

Den transponerte av en $m \times n$-matrise A er en $n \times m$-matrise $A^\top$ der rader og kolonner har byttet om. Rad 1 er blitt kolonne 1 osv.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 8 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \qquad A^\top = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Dette betyr at radrom har blitt kolonnerom og omvendt. Determinant og rank har ikke endret seg.

6.8.1 Adjunkt

Når vi har komplekse matriser brukes ofte den adjunkte $A^* = \overline{A^\top}$. Dette betyr at matrisen er transponert og komplekskonjugert. Alle komplekse tall blir ersattet med konjugatene sine ($a + bi \Rightarrow a - bi$). For reelle matriser vil altså $A^* = A^\top$. Ofte vil teoremer om reelle matrisers transponerte være overførbare til komplekse matrisers adjunkte. Hvis en reell matrise $A = A^\top$ kalles den symmetrisk. Hvis en matrise $A = A^*$ kalles den hermitsk. Se seksjon 11.

6.8.2 Resultater

- La A være en $m \times n$-matrise, og $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ være vektorer. Da gjelder følgende:
$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y}\rangle$$

- $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$
- $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^\top$
- $\det A = \det A^\top$
- A og $A^\top$ har de samme egenverdiene, men ikke nødvendigvis de samme egenvektorene. Beviset bruker determinanten, og at $I_n = I_n^\top$.

$$\det(A^\top - \lambda I_n) = \det((A - \lambda I_n)^\top) = \det(A - \lambda I_n)$$

- A^*A er alltid en hermitsk matrise
- A er inverterbar $\iff$ $A^\top A$ er inverterbar (hint: determinant av produkt).

6.9 Inverser

Når det er snakk om inversen til en matrise er det nesten alltid snakk om kvadratiske matriser.

6.9.1 Ikke-inverterbare matriser

Følgende er ekvivalent for en kvadratisk $n \times n$-matrise:

- $\det A = 0$
- $\operatorname{rank} A < n$
- A er ikke inverterbar
- $\operatorname{Null} A \neq \{0\}$
- A har 0 som egenverdi
- Lineærtransformasjonen $T(x) = Ax$ er ikke-injektiv

6.9.2 Kvadratiske matriser

En $n \times n$-matrise A sies å være inverterbar hvis $\operatorname{rank} A = n$, altså at alle kolonnene er lineært uavhengige. Dette betyr at dimensjonen til bildet er lik dimensjonen til input, som igjen betyr at nullrommet er 0-dimensjonalt. Dette betyr igjen at transformasjonen er bijektiv, som betyr inverterbar. Vi kaller inversen A^{-1}. Den er definert slik:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Det finnes kun én mulig verdi for A^{-1}, og den vil funke på begge sider av A. Vi kan regne ut A^{-1} ved å bruke radoperasjoner. Vi setter inn A på venstre side av streken, og identitetsmatrisen på andre side av streken. Deretter gjør vi radoperasjoner til venstresiden er blitt identitetsmatrisen. Da vil høyresiden være inversen til A.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Inversen til $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{smallmatrix}\right]$ er altså $\left[\begin{smallmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$

6.9.3 Left-inverser

Gitt en $m \times n$-matrise A der $\operatorname{rank} A = n$ (lineært uavhengige kolonner), er en left-invers A^{-1}_{left} en $n \times m$-matrise slik at $A^{-1}_{left} \cdot A = I_m$. For å finne en left-invers kan vi bruke $A^\top \cdot A$, som er en inverterbar $n \times n$-matrise.

$$\begin{aligned} (A^\top A)^{-1}(A^\top A) &= I_m \\ ((A^\top A)^{-1} A^\top) \cdot A &= I_m \\ (A^\top A)^{-1} A^\top &= A^{-1}_{left} \end{aligned}$$

7 Indreprodukt og ortogonalitet

Indreproduktet er en slags generalisering av dotproduktet som funker også i merkeligere vektorrom. Vi kan definere et indreprodukt $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \in \mathbb{C}$ mellom to vektorer i vektorrommet V. Operasjonen må tilfredsstille tre krav:

- **Symmetri** $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$

- **Positivitet** $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, og $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ kun hvis $\mathbf{v} = 0$
- **Linearitet** $\langle \mathbf{v}, (a\mathbf{w} + b\mathbf{u}) \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

Et vektorrom med et definert indreprodukt kalles et indreproduktrom. Merk at Wikipedia har definert indreproduktet som lineært i første ledd, mens Matte 3-forelesningsnotatene definerer i andre ledd.

7.1 Resultater

- $\langle \mathbf{v}, c\mathbf{w} \rangle = c\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \implies \langle c\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{c}\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
- $\langle 0, \mathbf{v} \rangle = 0$

7.2 Lengde og vinkel

Vi definer lengden av $\mathbf{v}$, $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$. På grunn av positivitetskravet vet vi $||\mathbf{v}|| \in \mathbb{R}$ og $||\mathbf{v}|| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$. Lengden mellom to vektorer $\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}$ blir da lik $||\mathbf{v} - \mathbf{u}||$

Vi definerer også vinkelen mellom to vektorer ved å bruke

$$Re\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = ||\mathbf{v}||||\mathbf{w}|| \cos\theta$$

og velge en vinkel $\theta \in [0, \pi]$. Vi vet at $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, så vinkelen vil alltid være definert. Det er ikke alle som gidder å definere vinkler mellom vekoter i vektorrom med komplekse indreprodukt.

7.3 Ortogonalitet

Vi definerer ortogonalitet på følgende måte

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$$

Vi kan også si at en vektor $\mathbf{v} \in V$ står ortogonalt på et underrom $U \subseteq V$. Dette vil si at $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$ for alle $\mathbf{u} \in U$. Vi får f.eks. slike underrom hvis vi tar spennet over ortogonale vektorer til $\mathbf{v}$. Utifra definisjonen på indreprodukt:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0 \wedge \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \\ a\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0 \wedge b\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{v}, a\mathbf{u} \rangle = 0 \wedge \langle \mathbf{v}, b\mathbf{u} \rangle = 0 \\ \implies \langle \mathbf{v}, a\mathbf{u} + b\mathbf{w} \rangle = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

7.3.1 Resultater

- Hvis $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er ortogonale, er $||\mathbf{v} + \mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{w}||^2$. "**Pytagoras**" gjelder altså.

7.4 Ortogonalt komplement

Gitt et indreproduktrom V og et underrom $U \subseteq V$, vil det ortogonale komplementet til U, $U^\perp$, være alle vektorer som står ortogonalt på alle vektorer i U. Denne mengden utgjør et underrom av V, siden den er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon. U og $U^\perp$ er lineært uavhengige, og tilsammen vil de spenne ut hele V.

7.4.1 Eksempel / Teorem + Bevis

Gitt en $m \times n$-matrise A vil $\operatorname{Row} A$ være ortogonalt komplement til $\operatorname{Null} A$. Vi setter først opp ligningen for nullrommet.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi kaller løsningsvektoren $\mathbf{x}$, og vet at den er i nullrommet til A. Husk at matrisemultiplikasjon kan deles opp som indreprodukt mellom rader og kolonner. Vi nummererer radene r_i for $1 \leq i \leq m$. Ligningen forteller oss altså at

$$\langle r_i, \mathbf{x} \rangle = 0, \qquad 1 \leq i \leq m$$

Dette betyr at enhver rad i A står ortogonalt på $\mathbf{x}$, altså enhver vektor i nullrommet. Dette medfører også at envher lineærkombinasjon av radvektorer vil stå ortogonalt på nullrommet. Vi vet altså nullrommet og radrommet er ortogonale, men for at $\operatorname{Null} A$ og $\operatorname{Row} A$ skal være hverandres ortogonale komplement må de til sammen spenne ut hele $\mathbb{R}^n$. Dette viser vi med *rank-nullity*. Se seksjon 6.7.1.

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Sp}\{\mathrm{Row}\, A, \mathrm{Null}\, A\} &= \dim RowA + \dim \mathrm{Null}\, A \\ &= \mathrm{rank}\, A + \dim \mathrm{Null}\, A \\ &= n\end{aligned}$$

Dette tilsammen gir oss at

$$(\mathrm{Row}\, A)^{\perp} = \mathrm{Null}\, A \qquad (\mathrm{Null}\, A)^{\perp} = \mathrm{Row}\, A$$

7.4.2 Resultater

- $\mathrm{Sp}\{U, U^{\perp}\} = V$
- $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$
- $U^{\perp^{\perp}} = U$
- $(\mathrm{Row}\, A)^{\perp} = \mathrm{Null}\, A$ (Se bevis over)

7.5 Eksempler

I R^n defineres ofte indreproduktet til å være dotproduktet. Med matrisemultiplikasjon skrives det slik:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^{\top} \mathbf{w}$$

I $\mathbb{C}^n$ kan vi definere indreproduktet lignende, men med adjunkt istedet:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^{*} \mathbf{w} = \overline{\mathbf{v}}^{\top} \mathbf{w}$$

I vektorrommet av kontinuerlige funksjoner på intervallet $[a, b]$ kan vi definere indreprodukt som

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \int_a^b \mathbf{v}(x)\mathbf{w}(x)dx$$

8 Projeksjon

Gitt en vektor $\mathbf{w}$ i indreproduktrommet V og et underrom U, er $P_U(\mathbf{w})$ vektoren i U nærmest $\mathbf{w}$. Vi vet da at vektoren fra $P_U(\mathbf{w})$ til $\mathbf{w}$ står ortogonalt på underrommet U. Lengden på denne vektoren er avstanden. Ortogonalitet og lengde defineres med indreproduktet i V.

8.1 Projeksjon til linje

Vi definerer først $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ der $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er vektorer i V.

$$P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v}$$

Resultatet er en vektor i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}\}$, altså på linjen til $\mathbf{v}$. Vektoren fra $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ til $\mathbf{w}$ kan vil kalle $\mathbf{x} = \mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$. Lengden $||\mathbf{x}||$ er da den korteste avstanden fra $\mathrm{Sp}\,\mathbf{v}$ til $\mathbf{w}$, og $\mathbf{x}$ står ortogonalt på $\mathbf{v}$, altså:

$$\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) \perp \mathbf{v} \iff \langle \mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle = 0$$

8.2 Ortogonal basis

For å gjøre projeksjon til et underrom U, er det kjekt å ha en ortogonal basis for U. $\mathbb{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ slik at $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0 forall e 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$. Dette har vi en algoritme for å gjøre.

8.2.1 Gram-Schmidt

La $\mathbb{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ være en basis for underrommet U i et indreprodukt-rom. Vi ønsker å finne en ortogonal basis $\mathbb{B}_\perp = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) - P_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3) \\
&\vdots \\
\mathbf{u}_n &= \mathbf{v}_n - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_n) - \cdots - P_{\mathbf{u}_n}(\mathbf{v}_n)
\end{aligned}$$

8.3 Projeksjon til underrom

Når vi skal projisere $\mathbf{v}$ til et underrom U, bruker vi en ortogonal basis for U.

$$B_\perp = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$$

Projeksjonen av $\mathbf{v}$ blir da lik summen av projeksjonene ned på hver vektor i den ortogonale basisen.

$$P_U(\mathbf{v}) = P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}) + P_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}) + \dots + P_{\mathbf{u}_n}(\mathbf{v})$$

8.4 Resultater

- $P_U(\mathbf{v})$ er en lineærtransformasjon:

$$P_U(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = aP_U(\mathbf{v}) + bP_U(\mathbf{w})$$

- $\mathbf{v} - P_U(\mathbf{v})$ står ortogonalt på U

9 Egenverdier og egenvektorer

La $T : V \to V$ være en lineærtransformasjon. Da er skalaren λ en egenverdi hvis det finnes en ikke-triviell vektor $v \in V$ slik at

$$T(v) = \lambda v$$

v kalles egenvektor for T med egenverdi λ. Merk at λ kan være $0 \implies v \in \ker T \setminus \{0\}$ er en egenvektor for T med $\lambda = 0$.

9.1 Egenrom

Gitt to egenvektorer $\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}$ med samme egenverdi λ, vet vi at en lineærkombinasjon av dem også vil være en egenvektor med egenverdi λ. Bevis:

$$T(a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{u}) = a \cdot T(\mathbf{v}) + b \cdot T(\mathbf{u}) = a \cdot \lambda\mathbf{v} + b \cdot \lambda\mathbf{u} = \lambda(a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w})$$

Dette betyr at alle $\mathbf{u} \in \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ er egenvektorer med egenverdi λ, gitt at alle $\mathbf{v}_n$ er egenvektorer med egenverdi λ. Alle egenvektorer med en gitt egenverdi λ utgjør derfor et underrom, som kalles egenrommet for λ. Husk at 0-vektoren ikke er en egenvektor, selv om den "er med" i alle underrom, også egenrom.

9.2 Å finne egenverdier og -rom

Gitt en kvadratisk $n \times n$-matrise A ønsker vi å finne en ikke-triviell vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ slik at

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} && (1)\\ A\mathbf{v} - \lambda I_n\mathbf{v} &= 0 && (2)\\ (A - \lambda I_n)\mathbf{v} &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Ligning (3) har kun ikke-trivielle løsninger hvis kolonnene ikke er lineært uavhengige, altså

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Dette gir et polynom i λ av grad n. Røttene til polynomet blir da egenverdier. Når vi har bestemt oss for en egenverdi λ kan vi finne egenrommet til den ved å løse ut for

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} \\ (A - \lambda I_n)\mathbf{x} &= 0 \end{aligned}$$

Siden determinanten til venstresiden er 0, vil den ha uendelig mange løsninger. Vi må derfor parameterisere.

9.2.1 Eksempel

TODO

9.3 Antall egenverdier

Egenverdier vil være røtter i polynomet vi fant. Antallet ganger en egenverdi λ forekommer som rot, kalles den **algebraiske multiplisiteten** til λ. For eksempel i polynomet

$$(\lambda - 4)^2(\lambda + 2) = 0$$

vil $\lambda = 4$ ha en algebraisk multiplisitet på 2, og $\lambda = -2$ ha en algebraisk multiplisitet på 1.

Algebraens fundamentalteorem forteller oss at summen av algebraiske multiplisiteter alltid er n, altså dimensjonen på matrisen, men ikke alle røttene til polynomet er nødvendigvis reelle tall.

I tillegg til algebraisk multiplisitet har alle egenverdier også **geometrisk multiplisitet**. Det er definert som dimensjonen på egenrommet til λ. Regel for enhver egenverdi λ:

$$1 \leq \text{geometrisk multiplisitet} \leq \text{algebraisk multiplisitet}$$

Vi sier at egenverdien er defekt hvis den geometriske multiplisiteten er lavere enn den algebraiske multiplisiteten. Dette kan også skje med komplekse egenverier.

Hvis ingen egenverdier er defekte vil summen av geometriske multiplisiteter være lik dimensjonen på rommet. Egenvektorer med ulik egenverdi er alltid lineært uavhengige. Det betyr at man har nok egenvektorer til å lage en basis for rommet av kun egenverdier. Dette er kravet for diagonalisering.

9.4 Komplekse egenverdier

I reelle matriser gjelder følgende: Hvis λ er en kompleks egenverdi, er også $\overline{\lambda}$ en kompleks egenverdi (anslagsvis med samme algebraiske multiplisitet). Dette betyr at en reell matrise $A_{n\times n}$ der n er et oddetall, må ha minst én reell egenverdi.

9.5 Resultater

- Hvis $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ er ulike egenverdier for $T : V \to V$, med henholdsvise egenvektorer $v_1, v_2, \dots, v_n$, vil vektorene være lineært uavhengige.

- Hvis $v_1, v_2, \dots, v_n$ er egenvektorer i V med samme egenverdi λ, er $\forall u \in \operatorname{Sp} v_1, v_2, \dots, v_n \setminus \{0\}$ egenvektorer med egenverdi λ

- Hvis matrisen A har egenverdi λ, vil A^n ha egenverdi λ^n

- Å ha 0 som egenverdi $\iff$ $\ker T$ ikke er triviell $\iff$ $[T]$ er ikke-inverterbar.

- For en $n \times n$-matrise vil $1 \leq \dim \operatorname{Sp}\{alleegenvektorer\} \leq n$

10 Diagonalisering

For en $n \times n$-matrise A med n lineært uavhengige egenvektorer (sum av geometrisk multiplisitet $= n$), kan vi lage $n \times n$-matriser P og D slik at

$$A = PDP^{-1}$$

der D er en diagonalmatrise, altså $D_{ij} = 0, i \neq j$. Dette gjør det lett å eksponensiere A siden

$$\begin{aligned} A^x &= (PDP^{-1})^x \\ &= PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1} \\ &= PD(P^{-1} \cdot P)D(P^{-1} \cdot \ldots \cdot P)DP^{-1} \\ &= PD \cdot I_n \cdot D \cdot I_n \cdot \ldots \cdot DP^{-1} \\ &= PD^xP^{-1} \end{aligned}$$

og vi lett kan regne ut D^x siden D er en diagonalmatrise, og hvert tall i matrisen dermed kan eksponensieres for seg.

Merk. En matrise kan være diagonaliserbar selv om den ikke er inverterbar (å ha 0 som egenverdi går fint).

10.1 Hvordan komme fram til P og D

Begynn med n lineært uavhengige egenvektorer til A: $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Når A ganges med v_x som kolonnevektor, blir svaret $\lambda_x v_x$. La så vektorene være kolonner i matrisen P:

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$
$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

La så D være en diagonalmatrise med $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ som diagonaler.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$
$$PD = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

Dette gir det totale uttrykket

$$AP = PD$$

Siden P består av lineært uavhengige kolonnevektorer er den inverterbar. Vi ganger med P^{-1} på begge sider og får

$$A = PDP^{-1}$$

10.2 Komplekse matriser

En reell $n \times n$-matrise er realt diagonaliserbar hvis og bare hvis det finnes en basis for $\mathbb{R}^n$ utgjort av egenvektorer til matrisen.
En kompleks $n \times n$-matrise er diagonaliserbar hvis og bare hvis det finnes en basis for $\mathbb{C}^n$ utgjort av egenvektorer til matrisen. Husk at den geometriske multiplisiteten til et egenrom ikke alltid er like stor som den algebraiske, uavhengig om du tillater komplekse tall.

10.3 Diagonaliserbare lineærtransformasjoner

La $T : V \to V$ være en lineærtransformasjon. Vi sier at T er diagonaliserbar hvis man kan lage en basis for V av egenvektorer $v_1, v_2, \ldots, v_n$ til T. Matrisen som beskriver T med hensyn på egenvektorbasisen er en diagonalmatrise D med diagonal $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

10.4 Resultater

For enhver $n \times n$-matrise A med n lineært uavhengige egenvektorer finnes matriser P og D der D er en diagonalmatrise, slik at

$$A = PDP^{-1}$$
$$P^{-1}AP = D$$

11 Symmetriske matriser

En reell matrise A er symmetrisk dersom $A = A^\top$. Det kan vises at alle symmetriske $n \times n$ matriser har n reelle egenverdier (i geometrisk multiplisitet), og er dermed diagonaliserbare med reell diagonalmatrise. Vi kan også vise at egenvektorer med ulik egenverdi alltid vil være ortogonale på hverandre:

En $n \times n$-matrise som har n ortogonale egenvektorer kalles **ortogonalt diagonaliserbar**

11.1 Hermitske matriser

For en kompleks $n \times n$-matrise A definerer vi at den er hermisk hvis $A = A^*$ der $A^* = \overline{A^\top}$. Hermitske matriser vil ha reell diagonal, og hvis hele matrisen er reell er den også symmetrisk. Funnene fra symmetriske matriser gjelder generelt for hermitske matriser:

En hermitsk $n \times n$-matrise har n reelle egenverdier, og er ortogonalt diagonaliserbar.

11.2 Resultater

- A er symmetrisk $\iff$ A er reell $\land$ A er hermitsk

- En $n \times n$-matrise er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis den er hermitsk/symmetrisk.

- Alle hermitske og symmetriske $n \times n$-matriser har n reelle egenverdier (talt i geometrisk multiplisitet).

12 Minste kvadraters metode

Minste kvadraters metode er en måte å finne den "nærmeste" løsningen til et inkonsistent lingsningssett / ligningssett med for mange ligninger. Ligningssettene skrives på formen $Ax = b$ der A er en $m \times n$-matrise og b er en kolonnevektor av lengde m. Løsningen x skal være en kolonnevektor av lengde n. Problemer oppstår når b ikke ligger i kolonnerommet til A. Da finnes det ikke noen x som transformert med A havner i b. Dette kan skje når A har færre enn m uavhengige kolonnevektorer. Da vil kolonnerommet være et strengt underrom av $\mathbb{R}^m$, og b kan dermed ligge utenfor.

Merk: Når vi skal bruke minste kvadraters metode kan vi ikke begyne med radoperasjoner, siden radoperasjoner endrer kolonnerommet.

Vi definerer avstanden fra b til kolonnerommet som $||b - P_{\mathrm{Col}\,A}(b)||$, siden vi vet at projeksjonen er den nærmeste vektoren. Vi ønsker altså å finne en vektor $\hat{x}$ slik at

$$A\hat{x} = P_{\mathrm{Col}\,A}(b)$$

Fra Seksjon 8 om projeksjoner vet vi at $b - P_{\mathrm{Col}\,A}(b)$ står ortogonalt på $\mathrm{Col}\,A$. Vi vet også at $\mathrm{Col}\,A = \mathrm{Row}\,A^\top$. Fra seksjonen om ortogonale komplementer vet vi at $\mathrm{Row}\,A$ er ortogonalt komplement til $\mathrm{Null}\,A$. Alt dette gir oss at

$$\begin{aligned} b - A\hat{x} &\in \mathrm{Null}\,A^\top \\ A^\top(b - A\hat{x}) &= 0 \\ A^\top b &= A^\top A\hat{x} \end{aligned}$$

Dette systemet kan vi løse, og de kalles normalligningene. $A^T A$ er en $n \times n$-matrise, og dersom den er inverterbar finnes det nøyaktig én løsning $\hat{x}$.

Merk. Det kan finnes flere løsninger for $\hat{x}$, men det er kun étt punkt i $\mathrm{Col}\,A$ som er nærmest b.

Merk. For komplekse matriser er det den adjunkte A^* i stedet for $A^\top$.

12.1 Interpolasjon og regresjon

Gitt et sett med n punkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, der $x$ene er unike, kan vi prøve å lage et polynom $P(x)$ slik at $P(x_i) = y_i$ for alle $i \in [1, n]$. Et polynom av grad m har $m+1$ frie variabler. Vi setter inn x-verdier og ønsket y-verdi som ligningssett på formen.

$$ax^m + bx^{m-1} + \cdots + cx + d = y$$

Dersom vi har flere ligninger enn ukjente må vi bruke minste kvadrats metode.

12.1.1 Eksempel

TODO

12.1.2 Resultater

Det finnes uendelig mange 2.-gradspolynomer som skjærer 2 punkter, men nøyaktig ett som skjærer 3.

Minste kvadraters metode minimerer "avstand" mellom polynomet og punktenes y-verdi. Avstand defineres etter indreproduktet

$$|| \begin{bmatrix} P(x_1) \\ P(x_2) \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} || = \sqrt{\Sigma_{i=1}^{n} (P(x_i) - y_i)^2}$$

Dette betyr i praksis at regresjonen minimerer summen av kvadratavvik på y-aksen.

13 Stokastiske matriser og Markovkjeder

En sannsynlighetsvektor er er vektor der alle koordinatene er større eller lik 0, og koordinatsummen er 1. En stokastisk matrise er en $n \times n$-kvadratisk matrise der kolonnene er sannsynlighetsvektorer. Stokastiske matriser kan ses som sannsynlighetene for tilstandsforandringer mellom alle ordnede par av tilstander. Kolonnen er nåværende tilstand, og raden er neste tilstand.

$$\begin{bmatrix} P(A_1|A_0) & P(A_1|B_0) & P(A_1|C_0) \\ P(B_1|A_0) & P(B_1|B_0) & P(B_1|C_0) \\ P(C_1|A_0) & P(C_1|B_0) & P(C_1|C_0) \end{bmatrix}$$

Produktet av en stokastisk matrise og en sannsynlighetsvektor vil være sannsynlighetene for hver tilstand i neste "runde", igjen en sannsynlighetsvektor.

Gitt en sannsynlighetsvektor $\mathbf{x}_0$ og en stokastisk matrise M kan vi definere **Markovkjeden**.

$$\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots\}, \qquad \mathbf{x}_n = M^n \mathbf{x}_0$$

13.1 Likevektsvektor

En likevektsvektor $\mathbf{q}$ til en stokastisk matrise M er en sannsynlighetsvektor som tilfredsstiller

$$M\mathbf{q} = \mathbf{q}$$

Altså er likevektsvektoren en egenvektor med egenverdi 1. En stokastisk matrise M vil alltid ha egenverdien 1 (Hint: $\lambda = 1$ i $M^\top$). Vi finner likeveksvektoren ved å finne en parameterisering til egenrommet til $\lambda = 1$, og sette parametere slik at koordinatsummen blir 1.

13.2 Regulære stokastiske matriser

En stokastisk matrise M er regulær hvis det finnes en $k \geq 1$ slik at alle elementer i M^k er større enn 0.

$$\begin{array}{cc} \text{Eksempel} & \text{Moteksempel} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

I moteksempelet ser du at kolonne nummer 2 "fanger" alt som kommer inn i den. Det er aldri mulig for noe i tilstand 2 å komme til tilstand 1, så kolonne 2 vil alltid ha 0en. Likevekstvektoren er unik for regulære stokastiske matriser. Det betyr at markovkjeden konvergerer mot det samme, uansett hvilken sannsynlighetsvektor $\mathbf{x}_0$ er.

13.3 Resultater

Gitt en regulær stokastisk matrise M konvergerer $\lim_{x\to\infty} M^k$ mot en regulær stokastisk matrise M' slik at alle sannsynlighetsvektorer ganget med M' blir samme vektor. Den ser slik ut, der q er likevektsvektoren (kolonne):

$$\begin{bmatrix} q & q & \cdots & q \end{bmatrix}$$

14 Differensialligningssett

Følgende kalles et *Førsteordens lineært og homogent system av differensialligninger med konstante koeffisienter.*

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1'(t) & = & a_{11}y_1(t) & + & a_{12}y_2(t) & + & \dots & + & a_{1n}y_n(t) \\ y_2'(t) & = & a_{21}y_1(t) & + & a_{22}y_2(t) & + & \dots & + & a_{2n}y_n(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ y_n'(t) & = & a_{n1}y_1(t) & + & a_{n2}y_2(t) & + & \dots & + & a_{nn}y_n(t) \end{array}$$

Det kan også skrives på formen $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ der $\mathbf{y}$ er en n-dimensjonal vektor av deriverbare funksjoner og A er en $n \times n$-matrise med alle koefisientene.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

I dette faget forholder vi oss kun til reelle koeffisienter.

La $\mathbf{v}$ være en egenvektor til A med egenverdi λ. Da vil følgende holde:

$$(\mathbf{v}e^{\lambda t})' = \mathbf{v}\lambda e^{\lambda t} = A\mathbf{v}e^{\lambda t}$$

$\mathbf{v}e^{\lambda t}$ er altså en løsning til systemet.

14.1 Superposisjonsprinsippet

Gitt to løsninger $\mathbf{y}_1' = A\mathbf{y}_1$ og $\mathbf{y}_2' = A\mathbf{y}_2$

Løsningene på systemet er en n-dimensjonalt vektorrom.

Appendikser

A Komplekse tall

Vi definerer $i^2 = -1$. Dette gir oss $\sqrt{-1} = i$, men vi må være veldig obs på å bruke kvadratrøtter slik. Husk at $x^2 = -1$ har to løsninger, i og $-i$. Hvis vi mikser og trikser for mye med kvadratrøtter får vi fort $1 = -1$.

Gitt komplekse tall $q = a + bi$, og $w = c + di$ har vi følgende regler.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re} q &= \Re(q) = a \\
\operatorname{Im} q &= \Im(q) = b \\
q + w &= a + c + (b + d)i \\
q \cdot w &= (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i \\
\bar{q} &= a - bi \\
q \cdot \bar{q} &= a^2 + b^2 \\
\frac{q}{w} &= \frac{q\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{q\bar{w}}{c^2 + d^2}
\end{aligned}
$$

Vi kan også se på komplekse tall som koordinater, både kartesiske og polare. Å summere er vanlig vektoraddisjon. Å gange sammen to komplekse tall blir å summere vinkelene, og multiplisere lengdene. Å gange med i er f.eks. å rotere 90° mot klokka. $\bar{q}$ er q speilet om den reelle aksen.

A.1 Polare koordinater

Man kan definere et komplekst tall ut ifra vinkel til den positive reelle aksen, og avstand fra origo.

$$re^{i\theta} = r\cos(\theta) + ri\sin(\theta)$$

Gitt to komplekse tall $q = re^{i\theta}$ og $w = se^{i\phi}$ har vi følgende regler:

$$
\begin{aligned}
q \cdot w &= rse^{i(\theta+\phi)} \\
\frac{q}{w} &= \frac{r}{s}e^{i(\theta-\phi)} \\
\bar{q} &= re^{-i\theta} \\
\operatorname{Re} q &= \Re(q) = r\cos(\theta) \\
\operatorname{Im} q &= \Im(q) = r\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

A.2 Resultater

- Ligningen $x^4 = 1$ har 4 løsninger, alle på den komplekse enhetssirkelen.
- Ethvert polynom av grad n har n røtter (i algrebraisk multiplisitet).

B Sannsynlighet

Vi gjør en liten oppfriskning på sannsynlighetsregning og definisjonene som gjelder der. Vi bruker en 6-sidet terning som eksempel. Terningen har 6 utfall $1, 2, 3, 4, 5, 6$ med lik sansynlighet. Vi definerer hendelsene

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 5\} \\ B &= \{4, 5, 6\} \\ C &= \{3\} \\ S &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \end{aligned}$$

Vi kaller her S for utfallsrommet, som er en spesiell hendelse som alltid inntreffer (inneholder alle utfall). Vi definerer vidre operatorer på hendelser.

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 3, 4, 5, 6\} && \text{Union (utfall med i minst én)} \\ A \cap B &= \{5\} && \text{Snitt (utfall med i begge)} \\ \bar{A} &= \{2, 4, 6\} && \text{Komplement } (S \setminus A) \end{aligned}$$

Vi lager i tillegg en ekstra definisjon:

To hendelser A og B er disjunkte dersom $A \cap B = \emptyset$

Vi ser da at B og C er disjunkte, i tillegg til at A og $\bar{A}$ alltid vil være disjunkte.

Vidre har vi aksiomer for sansynlighetsfunksjonen P.

$$P(S) = 1 \tag{4}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{5}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{6}$$

Ligning (6) gjelder **kun** når A og B er uavhengige hendelser! Utifra disse kan vi utlede alt annet vi trenger å vite, slik som:

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

B.1 Betinget sannsynlighet

Vi introduserer syntaksen $P(A|B)$, som betyr sannsynligheten for A gitt at B er inntruffet. Vi ser da på en andel av utfallsrommet til B.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Dette gir oss trivielle ting slik som $P(A|S) = P(A)$ og $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$. Et viktig prinsipp for det vi skal holde på med kalles **Total sannsynlighet**.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \\ &= P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) \end{aligned}$$